

---

# UNE NOUVELLE ANALYSE DES MESURES MAXIMISANT L'ENTROPIE DES DIFFÉOMORPHISMES D'ANOSOV DE SURFACES

*par*

Jérôme Buzzi

---

**Résumé.** — Cette note illustre la stratégie de [4] en obtenant une nouvelle preuve de la multiplicité finie de la mesure maximisant l'entropie des difféomorphismes d'Anosov, ici dans le cas bi-dimensionnel. Cette approche évite en particulier la construction explicite de partitions de Markov.

**Abstract.** — This note illustrates the strategy of [4] by giving a new proof of the finite multiplicity of the maximum entropy measure of Anosov diffeomorphisms (here on surfaces). This approach avoids the explicit construction of Markov partitions.

## Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Une partition $\mathcal{Q}$ en carrés et ses variétés symboliques.....	3
3. Dynamique symbolique.....	5
4. Extension périodique.....	7
5. Structure markovienne.....	8
6. Conclusion.....	10
Références.....	11

## 1. Introduction

Nous donnons dans cette note une nouvelle preuve du résultat classique suivant (nous renvoyons à [1] pour la preuve usuelle passant par la construction explicite de partitions de Markov finies, à [2] pour une approche basée sur la propriété de spécification et à [5] pour une approche récente basée sur l'opérateur de transfert):

---

**Mots clefs.** — Systèmes dynamiques; théorie ergodique; mesures maximisant l'entropie; hyperbolicité; dynamique symbolique; tours.

**Théorème 1 (Sinai).** — Soit  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme  $C^1$  sur une surface compacte  $M$  satisfaisant la condition d'Anosov: il existe une décomposition continue du fibré tangent:  $TM = E^s \oplus E^u$  telle que (i)  $f'(x).E_x^{u/s} = E_{f(x)}^{u/s}$ ; (ii)  $\|f'(x)|E_x^s\| \leq \kappa$  et  $\|f'(x)^{-1}|E_x^u\| \leq \kappa$  pour une constante  $\kappa < 1$  et tout  $x \in M$ .

Alors il existe un nombre fini de **mesures maximales**, i.e., de mesures de probabilité  $\mu$  sur  $M$ , invariantes et ergodiques par  $f$ , dont l'entropie  $h(f, \mu)$  coïncide avec l'entropie topologique  $h_{\text{top}}(f)$ . Si, de plus,  $f$  est topologiquement transitive, i.e., s'il existe une orbite dense, alors la mesure d'entropie maximale est unique.

Le but ici est de décrire une approche plus flexible, évitant notamment la construction explicite de partitions de Markov et pouvant s'étendre à des cas non-uniformes. Il s'agit d'une variante simplifiée de l'approche de [4] qu'on espère pouvoir adapter aux difféomorphismes entropie-hyperboliques [3]. Cette adaptation, au moins sous une hypothèse de domination et une condition probablement technique d'intégrabilité lisse, sera présentée dans un article en préparation.

**1.1. Contexte.** — Tout le long de cette note,  $f : M \rightarrow M$  sera comme ci-dessus. Nous utiliserons les faits standard suivants:

- (A) il existe des feuilletages réguliers  $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$  de  $M$  qui sont  $f$ -invariants et tangents en chaque point à  $E_x^u, E_x^s$ . La régularité des feuilletages est du type suivant. Au voisinage de chaque point  $x$  de  $M$ , il existe un homéomorphisme  $\phi^s : ]-1, 1[^2 \rightarrow U_x$  tel que: (i)  $U_x$  est un voisinage de  $x$ ; (ii)  $\phi^s(]-1, 1[ \times \{y\})$  est une composante connexe de  $\mathcal{F}^s(\phi^s(0, x) \cap U_x)$ ; (iii)  $\phi^s : ]-1, 1[ \times \{y\}$  est un  $C^1$ -diffeomorphisme sur son image.

- (B) il existe un nombre  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $x \in M$ :

$$\forall y \in M \quad [\forall n \in \mathbb{Z} \, d(f^n y, f^n x) < r_0] \iff y = x.$$

Un tel  $r_0 > 0$  est appelé **constante d'expansivité de  $f$** .

- (C)  $h_{\text{top}}(f) > 0$ .

- (D) Il existe  $\epsilon_0 > 0$ ,  $C_0 < \infty$  et  $\kappa_0 < 1$  tels que pour tous  $x, y \in M$ : pour  $d(x, y) < \epsilon_0$ , si  $\mathcal{F}^s(x) = \mathcal{F}^s(y)$  alors  $d(f^k x, f^k y) \leq C_0 \kappa_0^k$ ; si  $\mathcal{F}^u(x) = \mathcal{F}^u(y)$  alors  $d(f^{-k} x, f^{-k} y) \leq C_0 \kappa_0^k$ .

Ces faits sont bien connus. On pourra se reporter à [6].

**1.2. Quelques définitions.** — Les définitions et convention suivantes seront communes:

- une mesure est sauf mention contraire une mesure de probabilité;
- une **mesure de grande entropie** est une mesure invariante et ergodique telle que  $h(f, \mu) > h_0$  où  $h_0 < h_{\text{top}}(f)$  est un paramètre implicite. Nous dénotons par  $\text{Prob}_{\text{erg}}^{h_0}(f)$  l'ensemble de toutes les mesures invariantes et ergodiques d'entropie  $> h_0$ ;
- un sous-ensemble  $E \subset M$  est dit  **$h$ -négligeable** s'il est de mesure zéro pour toutes les mesures de grande entropie:  $\exists h_0 < h_{\text{top}}(f) \forall \mu \in \text{Prob}_{\text{erg}}^{h_0}(f), \mu(E) = 0$ ;
- une propriété **a lieu  $h$ -presque partout** si elle a lieu pour tout point de  $M$  en dehors d'un ensemble  $h$ -négligeable;

- une estimation a lieu de façon **semi-uniforme** si elle a lieu sur un ensemble mesurable de mesure uniformément minorée par rapport à toute mesure de grande entropie.

Etant donné un ensemble  $\mathcal{Q}$  de parties disjointes de  $M$ , on définit pour  $x \in M$  où cela a un sens:

- $\mathcal{Q}(x)$ , l'élément de  $\mathcal{Q}$  contenant  $x$ ;
- le  **$\mathcal{Q}$ -itinéraire** de  $x$  est  $A \in \mathcal{Q}^{\mathbb{Z}}$  tel que  $A_n = \mathcal{Q}(f^n x)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
- la **variété symbolique  $\mathcal{Q}$ -stable** et la **variété symbolique  $\mathcal{Q}$ -instable** sont, respectivement:

$$W_{\mathcal{Q}}^s(x) := \bigcap_{n \geq 1} \overline{f^{-n}\mathcal{Q}(f^n x)} \text{ et } W_{\mathcal{Q}}^u(x) := \bigcap_{n \geq 1} \overline{f^n \mathcal{Q}(f^{-n} x)} \quad (x \in M)$$

et

$$W^s(A) := \bigcap_{n \geq 1} \overline{f^{-n} A_n} \text{ et } W^u(A) := \bigcap_{n \geq 1} \overline{f^n A_{-n}} \quad (A \in \mathcal{Q}^{\mathbb{Z}}).$$

- $W_{\mathcal{Q}}^s(x)$  **traverse**  $\mathcal{Q}$  (ou simplement, **traverse**) si  $W_{\mathcal{Q}}^s(x)$  contient un arc joignant les deux segments opposés du bord instable de  $\mathcal{Q}(x)$ . Cette notion s'étend de façon naturelle à  $W^s(A)$ ,  $W_{\mathcal{Q}}^u(x)$ ,  $W^u(A)$ .

**1.3. Stratégie de la preuve.** — La preuve se décompose en les étapes suivantes:

- Construction d'une partition finie  $\mathcal{Q}$  de diamètre maximal arbitrairement petit en carrés (voir définition ci-dessous);
- Existence, pour tout  $m < 1$ , de  $r_1 > 0$  tel que l'ensemble des  $x \in M$  vérifiant

$$(1.1) \quad d(x, \partial W_{\mathcal{Q}}^s(x)) > r_1 \text{ et } d(x, \partial W_{\mathcal{Q}}^u(x)) > r_1$$

est de mesure au moins  $m$  pour toute mesure de grande entropie.

- Remplacement de  $f$  par une extension périodique et modifications de  $\mathcal{Q}$  garantissant que  $W_{\mathcal{Q}}^s(x)$  et  $W_{\mathcal{Q}}^u(x)$  traversent pour tout  $x$  appartenant à un ensemble de mesure strictement positive pour toute mesure de grande entropie.
- Structure markovienne de l'ensemble des  $\mathcal{Q}$ -itinéraires de  $h$ -presque tout point.
- Théorie de Gurevič des sous-décalages markoviens (à ensemble d'états dénombrable) ramenant le dénombrement des mesures maximales à celui des parties irréductibles d'entropie maximale et contrôle de celles-ci.

## 2. Une partition $\mathcal{Q}$ en carrés et ses variétés symboliques

On construit dans cette section une partition  $\mathcal{Q}$  et on obtient une borne inférieure semi-uniforme pour les variétés  $\mathcal{Q}$ -stables et  $\mathcal{Q}$ -instables. Les feuilletages invariants permettent de ne considérer que des géométries triviales:

**Définition 2.1.** — Un **carré** (ou *carré us*) est un disque ouvert topologique dont le bord est constitué de quatre segments de courbes compacts alternativement inclus dans une feuille stable et une feuille instable (voir Figure 1). On parlera des deux bords stables et des deux bords instables.

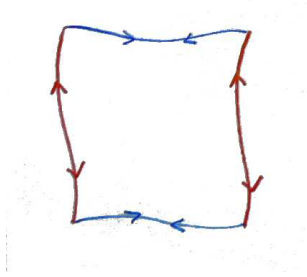


FIGURE 1. Un carré borné par quatre courbes alternativement incluses dans  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$ .

Il est immédiat que l'image ou l'intersection de tels carrés sont encore des carrés du même type. Le lemme suivant est clair:

**Lemme 2.2.** — *Soit  $r > 0$ . Il existe une partition finie en carrés dont les diamètres sont majorés par  $r$ .*

L'estimation semi-uniforme annoncée est la suivante:

**Proposition 2.3.** — *Pour tout  $m_1 > 0$ , il existe  $h_1 < h_{\text{top}}(f)$  et  $r_1 > 0$  tel que pour tout  $\mu \in \text{Prob}_{\text{erg}}^{h_0}(f)$ ,*

$$\mu(\{x \in M : d(x, \partial W_{\mathcal{Q}}^u(x)) < r_1\}) < m_1.$$

**Remarque 2.4.** — *Si une mesure ergodique est d'entropie non-nulle, la preuve ci-dessous implique seulement qu'il existe un ensemble de mesure positive où  $d(x, \partial W_{\mathcal{Q}}^s(x)) \geq \text{const}$  et un autre, également de mesure positive, où  $d(x, \partial W_{\mathcal{Q}}^u(x)) \geq \text{const}$ , mais n'entraîne pas que ces deux ensembles s'intersectent. Ceci est un obstacle à l'analyse des mesures d'équilibre pour des potentiels non presque constants.*

Avant de prouver cet énoncé, donnons quelques définitions et faits auxiliaires. Les **partitions itérées** sont, pour  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{Q}^n := \{[A_0 A_1 \dots A_{n-1}] := A_0 \cap f^{-1} A_1 \cap \dots \cap f^{-n+1} A_{n-1} \neq \emptyset : A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{Q}\}.$$

La **multiplicité locale** d'une collection  $C$  de parties de  $M$  est:

$$\text{mult}(C) = \max_{x \in M} \#\{A \in C : \bar{A} \ni x\}.$$

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{Q}^n$  est une partition en carrés du fait de l'invariance des feuilletages. Il s'en suit que:

$$(2.1) \quad \forall n \geq 0 \text{ mult}(\mathcal{Q}^n) \leq 4.$$

La formule suivante est classique (voir, par exemple, [7]):

**Lemme 2.5.** — Soit  $\mu$  une mesure  $f$ -invariante. Considérons la partition mesurable  $\{W_{\mathcal{Q}}^u(x) : x \in M\} = \bigvee_{n \geq 1} f^n \mathcal{Q}$  et la désintégration associée  $\{\mu|_{W_{\mathcal{Q}}^u(x)}\}_{x \in M}$  of  $\mu$ . Alors, pour tout  $N \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} h(f, \mu, \mathcal{Q}) &= \frac{1}{N} H_{\mu}(\mathcal{Q}^N | \bigvee_{n \geq 1} f^n \mathcal{Q}) = \frac{1}{N} \int_M H_{\mu|_{W_{\mathcal{Q}}^u(x)}}(\mathcal{Q}^N) d\mu \\ &\leq \int_M \frac{1}{N} \log \# \{A \in \mathcal{Q}^N : (\mu|_{W^u(\mathcal{Q}(x))})([A]) > 0\} \mu(dx) \end{aligned}$$

Remarquons que, vu l'expansivité de  $f$  et le petit diamètre de  $\mathcal{Q}$ ,  $h(f, \mu) = h(f, \mu, \mathcal{Q})$ .

*Preuve de la Proposition.* — Soit  $0 < \alpha < m_1 \cdot h_{\text{top}}(f)$ . Fixons  $T > \log 8/\alpha$  tel que :

$$\forall n \geq T \quad \# \mathcal{Q}^n \leq e^{(h_{\text{top}}(f) + \alpha)n}.$$

D'après (2.1) et la compacité, pour  $r_1 > 0$  assez petit, une boule fermée de rayon  $r_1$  rencontre au plus 4 éléments de  $\mathcal{Q}^T$ . Alors, pour tout  $A \in \Sigma(f, \mathcal{Q})$ ,

$$\{\mathcal{Q}^T(x) : W_{\mathcal{Q}}^u(x) = W^u(A) \text{ et } d(x, \partial W_{\mathcal{Q}}^u(x)) < r_1\} \leq 2 \times 4$$

En effet, une fois connu le point extrémité  $z$  proche de  $x$  (un choix binaire étant donné le passé),  $\mathcal{Q}^T(x)$  se trouve parmi au plus 4 éléments de  $\mathcal{Q}^T$  rencontrant  $\overline{B(z, r_1)}$ .

Soit  $\mu$  une mesure ergodique et invariante. Posons  $M_1 := \{x \in M : d(x, \partial W_{\mathcal{Q}}^u(x)) \leq r_1\}$ . Le lemme 2.5 donne :

$$\begin{aligned} h(f, \mu) &\leq \int_{M_1} \frac{1}{T} \log 8 d\mu \\ &\quad + \int_{M \setminus M_1} (h_{\text{top}}(f) + \alpha) \leq h_{\text{top}}(f) - \mu(M_1)h_{\text{top}}(f) + \alpha := h_1 \end{aligned}$$

Si  $\mu(M_1) \geq m_1 > \frac{\alpha}{h_{\text{top}}(f)}$ , alors on obtient une borne non-triviale :

$$h(f, \mu) \leq h_1 := h_{\text{top}}(f) - m_1 h_{\text{top}}(f) + \alpha < h_{\text{top}}(f).$$

□

### 3. Dynamique symbolique

La partition  $\mathcal{Q}$  précédemment construite permet de définir une dynamique symbolique dont on montre ci-dessous qu'elle représente fidèlement les mesures maximales de  $f$ .

**Définition 3.1.** — Si  $\mathcal{P}$  est une collection d'ouverts disjoints et d'union dense  $M'$  dans  $M$ , alors la **dynamique symbolique** est définie comme le sous-décalage

$$\Sigma(f, \mathcal{P}) := \overline{\{\dots \mathcal{P}(f^{-1}x) \mathcal{P}(x) \mathcal{P}(fx) \dots : x \in M'\}} \quad \sigma((A_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (A_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

où la fermeture est prise dans  $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$ ,  $\mathcal{P}$  étant muni de la topologie discrète. La projection  $p : \Sigma(f, \mathcal{P}) \rightarrow M$  est définie par  $\{p(x)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \overline{A_n}$ , où cela a un sens.

On vérifie aisément que  $p \circ \sigma = f \circ p$  où cela a un sens et que

$$\Sigma(f, \mathcal{P}) = \{A \in \mathcal{P}^{\mathbb{Z}} : \forall n < m [A_n \dots A_m] \neq \emptyset\}.$$

**Proposition 3.2.** — Soit  $\mathcal{Q}$  une partition<sup>(1)</sup> de  $M$  en l'intérieurs de carrés us de diamètres strictement plus petits que la constante d'expansivité. Soit  $\Sigma(f, \mathcal{Q})$  et  $p : \Sigma(f, \mathcal{P}) \rightarrow M$  comme ci-dessus.

- $p$  est bien définie sur tout  $A \in \Sigma(f, \mathcal{P})$  et continue.
- $p$  est au plus 4 sur 1. En particulier, toute mesure de probabilité invariante se relève et  $p$  préserve l'entropie mesurée et topologique.
- Soit  $\mu, \mu'$  des mesures de probabilité de  $\Sigma(f, \mathcal{P})$ . Supposons  $p_*\mu$  apériodique. Alors  $p_*\mu = p_*\mu'$  implique  $\mu = \mu'$  et  $p_*\mu$  est ergodique si et seulement si  $\mu$  est ergodique.

En particulier, on a immédiatement:

**Corollaire 3.3.** —  $p$  induit une bijection entre les mesures maximales de  $f$  et de  $\Sigma(f, \mathcal{Q})$ .

Le lemme suivant est utile.

**Lemme 3.4.** — Soit  $\mu$  une mesure invariante et ergodique. Si  $\mu(\mathcal{F}^s(x)) > 0$  (plus précisément: s'il existe une partie mesurable de  $\mathcal{F}^s(x_0)$  de mesure non-nulle) alors  $\mu$  est périodique.

*Démonstration.* — Par récurrence, on peut trouver  $z \in \mathcal{F}^s(x)$  et  $p \geq 1$  tels que, pour tout  $r > 0$ ,  $\mu(B(z, r) \cap \mathcal{F}^s(z)) > 0$  et  $f^p z$  est proche de  $z$ . (D, page 1) montre alors que  $f^p$  est une contraction de  $B(z, r) \cap \mathcal{F}^s(z)$  dans lui-même. Le théorème ergodique montre alors que  $\mu$  est une mesure périodique portée par l'orbite de  $p$ .  $\square$

*Preuve de la proposition.* — D'une part,  $f$  étant expansif et  $\mathcal{Q}$  de petit diamètre,  $p$  est bien définie et continue. D'autre part,

$$\#p^{-1}(x) \leq \sup_{n \geq 1} \text{mult}(\mathcal{Q}^n) = 4.$$

La préservation de l'entropie est évidente. La fibre de  $p$  étant en particulier compacte toute mesure invariante de  $f$  se relève en une mesure invariante de  $\Sigma(f, \mathcal{P})$ .

Finalement, supposons  $p(A) = p(B)$ . Si  $A \neq B$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $A_n \neq B_n$  et  $f^n x \in \overline{A_n} \cap \overline{B_n} \subset \partial \mathcal{P}$ . Donc  $p(\mu) = p(\mu')$  implique, si  $\mu \neq \mu'$ , que  $\mu(\partial \mathcal{P}) > 0$ . Mais  $\partial \mathcal{P}$  est une union finie de segments de feuilles stables et instables. Donc  $\mu(\mathcal{F}^\sigma(x_0)) > 0$  pour un certain  $x_0 \in M$  et  $\sigma = s$  ou  $u$ . Le lemme ci-dessus montre qu'alors  $\mu$  est périodique, une contradiction. Si  $p_*\mu$  est ergodique alors les composantes ergodiques de  $\mu$  sont autant de relèvements de  $p_*\mu$ . D'après l'unicité de ce relèvement,  $\mu$  est également ergodique. L'implication réciproque est un fait totalement général.  $\square$

<sup>(1)</sup>Abus de langage:  $\mathcal{Q}$  est en fait une collection d'ouverts disjoints d'union dense dans  $M$ .

#### 4. Extension périodique

On a vu que les variétés symboliques stables et instables sont de taille semi-uniforme. On va montrer qu'on peut faire en sorte que ces variétés symboliques traversent bien  $\mathcal{Q}$ . La difficulté est que la borne inférieure donnée par la proposition 2.3 est typiquement plus petite que le diamètre de la partition à moins que  $f$  ne soit fortement dilatante. Nous utilisons la construction suivante.

Soit un entier  $T \geq 1$ . On pose  $M_T := M \times \mathbb{Z}/T\mathbb{Z}$  et  $f_T(x, k) := (fx, k + 1)$ .

L'extension  $\pi : (M_T, f_T) \rightarrow (M, f)$  est continue et compacte. Donc toute collection de mesures  $f$ -invariantes et distinctes se relève en une collection de mesures  $f_T$ -invariante et distinctes. L'extension est finie donc préserve l'entropie mesurée. Ainsi il suffit de prouver le théorème pour  $f_T$ , pour un  $T \geq 1$  commode.

**Proposition 4.1.** — *Pour  $T$  assez grand, il existe une partition  $\mathcal{Q}_T$  de  $M_T$ , partition en carrés us, telle que,*

$$(4.1) \quad B_T := \{x \in M_T : W_{\mathcal{Q}_T}^s(x) \text{ et } W_{\mathcal{Q}_T}^u(x) \text{ traversent } \mathcal{Q}(x)\}$$

*est de mesure  $> 0$  par rapport à toute mesure  $f_T$ -invariante de grande entropie.*

*Démonstration.* — Le lemme 2.2 fournit une partition  $\mathcal{Q}_0$  en carrés de diamètre  $< r_0$ .

Soit  $0 < \epsilon_1 < 1$ . La proposition 2.3 appliquée deux fois donne  $r_1 > 0$  et  $h_1 > 0$  tels que, sur un ensemble  $B_0$  de mesure au moins  $1 - 2\epsilon_1$  pour toute mesure ergodique d'entropie  $> h_1$ ,  $d(x, \partial W_{\mathcal{Q}_0}^s(x)) > r_1$  et  $d(x, \partial W_{\mathcal{Q}_0}^u(x)) > r_1$ .

Soit  $\mathcal{Q}_1$  une nouvelle partition finie de  $M$  en carrés de diamètre  $< r_1$ . Pour  $x \in B_0$ ,  $W_{\mathcal{Q}_0}^u(x)$  traverse  $\mathcal{Q}_1$ . On passe à l'extension pour un entier  $T \gg 1$ . On pose

$$\mathcal{Q}_T := \mathcal{Q}_1 \times \{0\} \cup \mathcal{Q}_0 \times \{1\} \cup \dots \cup \mathcal{Q}_0 \times \{T-1\}$$

Le lemme ci-dessous donne  $h_2 < h_{\text{top}}(f)$  tel que, en posant  $B_T^0 := B_T \cap (M \times \{0\})$  et en remarquant que  $x \in M \times \{0\} \setminus B_T^0 \subset (M \setminus B_0) \times \{0\} \cup C_T^0$ :

$$\mu_T(B_T^0) > \frac{1 - 4\epsilon_1}{T} \implies h(f_T, \mu_T) < \max(h_1, h_2)$$

avec  $\max(h_1, h_2) < h_{\text{top}}(f)$ , dès que  $T$  est choisi assez grand.  $\square$

**Lemme 4.2.** — *Pour tout  $\epsilon_1 > 0$ , il existe  $T_1 < \infty$  et  $h_2 < h_{\text{top}}(f)$  tels que pour tout  $T \geq T_1$  et toute mesure ergodique satisfaisant  $h(f_T, \mu_T) > h_2$ :*

$$\mu_T(C_T^0) < \frac{\epsilon_1}{T} \text{ où } C_T^0 := \{(x, 0) \in M \times \{0\} : \pi W_{\mathcal{Q}_T}^u(x, 0) \subsetneq W_{\mathcal{Q}}^u(x)\}.$$

*Démonstration.* — Supposons  $\pi W_{\mathcal{Q}_T}^u(x, 0) \subsetneq W_{\mathcal{Q}}^u(x)$ . Le raccourcissement de  $W_{\mathcal{Q}_T}^u(x, 0)$  ne peut venir que d'un temps  $k < 0$  tel que  $f_T^k(x, 0) \in M \times \{0\}$ . Plus précisément, il doit exister un entier  $n \geq 1$  tel que  $\partial \mathcal{Q}_1(f^{-nT}x)$  coupe  $f^{-nT}W_{\mathcal{Q}_0}^u(x)$  en un point  $z$ . On a donc  $\mathcal{Q}_0^{nT}(z) = \mathcal{Q}_0^{nT}(x)$  pour un  $z \in W_{\mathcal{Q}_0}^u(f^{-nT}x) \cap \partial \mathcal{Q}_1(f^{-nT}x)$ .

On voit que pour tout  $(x, 0) \in C_T^0$ , il existe un entier  $n = n(x) \geq 1$  tel que, sachant  $W_{\mathcal{Q}_0}^u(f^{-nT}x)$  et  $\mathcal{Q}_1(f^{-nT}x)$ ,  $\mathcal{Q}_0^{nT}(f^{-nT}x)$  est déterminé par le choix de  $z$  parmi les deux points d'intersection de  $W_{\mathcal{Q}_0}^u(f^{-nT}x)$  avec  $\partial \mathcal{Q}_1(f^{-nT}x)$ . On déduit une borne sur l'entropie.

Soit  $\alpha < \epsilon_1 h_{\text{top}}(f)/16$ . En fixant  $T_1$  assez grand on peut garantir:

$$\forall n \geq T_1 \quad \# \mathcal{Q}_0^n \leq e^{(h_{\text{top}}(f) + \alpha)n}.$$

On peut supposer  $T_1 \geq \log 2 \# \mathcal{Q}_1 \log \# \mathcal{Q}_0 / \alpha \geq \log 2 / \alpha$ . Fixons  $T \geq T_1$  et une mesure  $\mu_T$ . On suppose par contradiction que:

$$m := T \cdot \mu_T(C_T^0) \geq \epsilon_1.$$

Fixons  $N = N(\mu) < \infty$  tel que

$$\mu_T(\{x \in C_T^0 : n(x) > N\}) < \frac{\beta}{T}.$$

Le théorème de Birkhoff fournit un ensemble  $E_2 \subset M_T$  et un entier  $N_2$  tels que  $\mu_T(E_2) > 1 - \epsilon_1/T$  et pour tout  $x \in E_2$ , tout  $n \geq N_2$ :

$$\left| \frac{1}{n} \# \{0 \leq k < n : f_T^{kT}(x) \in C_T^0\} - m \right| < \frac{\epsilon_1}{8} \text{ et } \frac{1}{n} \# \{0 \leq k < n : n(f_T^{kT}(x)) > N\} < \beta$$

On découpe  $[0, n-1]$  en des sous-intervalles  $[aT, bT-1]$ ,  $a \leq b$  entiers, de trois types:

- $f_T^{bT}x \in B_T^0$ ,  $n(f_T^{bT}x) \leq N$  et  $a = b - n(x)$  ( $[aT; bT-1]$  est de type 1);
- $f_T^{bT}x \notin B_T^0$  et  $a = b - 1$  ( $[aT; bT-1]$  est de type 2);
- $f_T^{bT}x \in B_T^0$ ,  $n(f_T^{bT}x) > N$  et  $a = b - 1$  ( $[aT; bT-1]$  est de type 3).

On décrit  $\mathcal{Q}_0^n(x)$  de la façon suivante. On spécifie la position des intervalles de type 1 parmi les  $n/T$  intervalles de longueur  $T$  (ce qui donne  $2^{n/T}$  choix au plus). Plus précisément il y en a entre  $\epsilon_1 n/2T$  et  $2\epsilon_1 n/T$  et leur longueur totale est  $L_1 \geq \epsilon_1 n/2$ .

Chaque intervalle de type 1 correspond à une suite  $\mathcal{Q}_0^{(b-a)T}$  à choisir parmi  $2 \cdot \# \mathcal{Q}_1$  suites seulement, si on a déjà déterminé les  $\mathcal{Q}_0(f^k x)$  pour  $k \geq aT$ , d'après les remarques précédentes. On a donc, conditionnellement, au plus  $(2 \cdot \# \mathcal{Q}_1)^{2\epsilon_1 n/T}$  choix de symboles pour l'ensemble de ces intervalles.

Pour les intervalles de type 2 ou 3,  $\mathcal{Q}_0^{(b-a)T}(f^a x) \in \mathcal{Q}_0^{\ell T}$ ,  $\ell \geq 1$ . On a donc  $e^{(n-L_1)(h_{\text{top}}(f) + \alpha)}$  choix possibles au total pour ces intervalles.

Au final le nombre de  $\mathcal{Q}_0^n(x)$  sachant  $W_{\mathcal{Q}_0}^u(x)$  est borné par:

$$2^{n/T} \times (2 \cdot \# \mathcal{Q}_1)^{2\epsilon_1 n/T} \times e^{n(1-\epsilon_1/2)(h_{\text{top}}(f) + \alpha)} \leq \exp n \left( h_{\text{top}}(f) - \frac{\epsilon_1}{2} h_{\text{top}}(f) + 3\alpha \right)$$

Donc, d'après le lemme 2.5, on a:

$$h(f, \mu) \leq h_{\text{top}}(f) - \frac{\epsilon_1}{4} h_{\text{top}}(f) =: h_1.$$

□

## 5. Structure markovienne

D'après la Proposition 4.1, on peut supposer que

$$B := \{x \in M : W_{\mathcal{Q}}^s(x) \text{ et } W_{\mathcal{Q}}^u(x) \text{ traversent } \mathcal{Q}(x)\}$$

est de mesure non-nulle pour toute mesure de grande entropie.

Soit  $\tau_B(x) := \inf\{n \geq 1 : f^n x \in B\}$ , le temps de premier retour dans  $B$ . D'après le théorème de Kac,  $h$ -presque tout point de  $\Sigma(f, \mathcal{Q})$  passe donc une infinité de fois dans



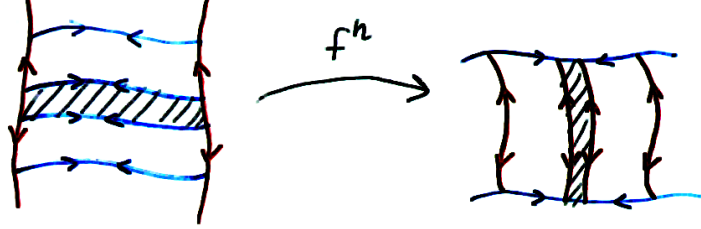


FIGURE 2. Un rectangle topologiquement hyperbolique et son image (hachurés), représentés dans leur carrés respectifs. Les courbes approximativement horizontales (bleues), resp. verticales (rouges), sont des morceaux de  $\mathcal{F}^s$ , resp.  $\mathcal{F}^u$ .

$B$  aussi bien dans le futur que dans le passé. Soit  $\Sigma'(f, \mathcal{Q})$  l'ensemble des  $\mathcal{Q}$ -itinéraires de ces bons points.

**Définition 5.1.** — *Un mot de premier retour est une suite finie  $A_0 \dots A_n$  telle qu'il existe  $x \in B$  satisfaisant:  $A_k = \mathcal{Q}(f^k x)$  (pour tout  $0 \leq k \leq n$ ) et  $n = \tau_B(x)$ . On lui associe la suite finie  $(A_0, *)A_1 \dots A_{n-1}$  appelée **mot de base**.*

*Le sous-décalage  $\Sigma_B$  est l'ensemble des suites bi-infinies formées par la concaténation de mots de base sous la condition suivante:*

*Si  $(A_0, *)A_1 \dots A_{n-1}(B_0, *)$  apparaît alors  $A_0 \dots A_{n-1}B_0$  est un mot de premier retour.*

*Pour une suite  $\hat{A} \in \Sigma_B$ , les entiers  $k \in \mathbb{Z}$  dont le  $k$ ème symbole  $\hat{A}_k$  est étoilé sont appelés des **temps marqués**.*

Remarquons que  $\Sigma_B$  ainsi défini a un alphabet fini mais n'est pas forcément un sous-shift et que son adhérence n'est pas nécessairement de type fini. Toutefois, on verra que  $\Sigma_B$  est conjugué à un sous-décalage markovien (sur un alphabet dénombrable, infini en général) et ceci permettra son analyse.

**Proposition 5.2.** — *Soit  $\pi : \Sigma_B \rightarrow \Sigma(f, \mathcal{Q})$  la projection définie symbole par symbole par  $\pi(A, *) = A$  et  $\pi(A) = A$  pour tout  $A \in \mathcal{Q}$ . Alors  $\pi$  est bien définie et induit une bijection entre les mesures maximales de  $\Sigma_B$  et celles de  $\Sigma(f, \mathcal{Q})$ .*

**Etape 1.**  $\pi$  est bien définie.

Il faut voir que l'image de tout  $\omega \in \Sigma_B$  est bien dans  $\Sigma(f, \mathcal{Q})$ , c'est-à-dire que  $\bigcap_{k=-n}^m f^{-k} A_k \neq \emptyset$  pour des entiers  $n, m \rightarrow \infty$ . Il suffit de montrer que si  $A_0^i \dots A_{n_i}^i$ ,  $i = 1, \dots, I$ , sont des mots de premiers retours avec  $A_{n_i}^i = A_0^{i+1}$  pour tout  $i = 1, \dots, I-1$ , alors,

$$\bigcap_{i=1}^I f^{-(n_1 + \dots + n_{i-1})} H_i \neq \emptyset \quad \text{où} \quad H_i := \bigcap_{k=0}^{n_i} f^{-k} A_k^i.$$

Ceci provient de l'hyperbolicité "topologique" des  $f^{n_i} : H_i \rightarrow f^{n_i} H_i$  illustrée par la figure 2. On vérifie par récurrence que l'intersection ci-dessus est encore hyperbolique et en particulier est non vide.

**Etape 2.**  $\pi$  est injective

Soit  $A \in \Sigma'(f, \mathcal{Q})$ . Soit  $\hat{A} \in \Sigma_B$  le relevé obtenu en marquant exactement les temps  $n \in \mathbb{Z}$  tels que  $\sigma^n A \in B_\Sigma$ .  $\hat{A}$  est clairement un élément bien défini de  $\Sigma_B$ .

Il suffit de montrer que si  $\hat{A}'$  est un relèvement quelconque de  $A$ ,  $\hat{A}' = \hat{A}$ .

Pour tout temps marqué  $k$  de  $\hat{A}'$ , le raisonnement de l'étape 1 implique que  $W^s(\sigma^k A)$  et  $W^u(\sigma^k A)$  traversent. Donc un tel  $k$  est marqué pour  $\hat{A}$ . Montrons la réciproque par l'absurde: on suppose que  $0, n_1, n_2, \dots, n_r$ ,  $r \geq 2$ , sont des temps marqués consécutifs dans  $\hat{A}$  et que, parmi ceux-ci, seuls 0 et  $n_r$  sont marqués dans  $\hat{A}'$ .

$A_0 \dots A_{n_r}$  est donc  $\mathcal{Q}^{n_r+1}(y)$  pour un  $y \in B$  avec  $\tau_B(y) = n_r$ . Il s'en suit que  $W_{\mathcal{Q}}^s(f^{n_1} y)$  ne traverse pas. Autrement dit, l'intersection  $\ell^s$  de la courbe stable locale avec  $\mathcal{Q}(f^{n_1} y)$  n'est pas contenue dans  $W_{\mathcal{Q}}^s(f^{n_1} y)$ . Donc  $f^m \ell^s$  n'est pas inclus dans un élément de  $\mathcal{Q}$  pour un certain  $m > 0$  qu'on peut choisir minimal. Nécessairement  $m < n_r - n_1$ : sinon  $W_{\mathcal{Q}}^s(f^{n_r} y)$  qui traverse contiendrait  $f^{n_r - n_1}(\ell^s)$ , impliquant que  $\ell^s \subset W_{\mathcal{Q}}^s(f^{n_1} y)$ , une contradiction.

Le bord instable de  $\mathcal{Q}(f^m y) = A_m$  raccourcit donc  $W_{\mathcal{Q}}^s(f^{n_1} y)$  par rapport à  $\ell^s$ . Un des bords instables de  $[A_{n_1} \dots A_{n_1+m-1}]$  est donc envoyé à l'extérieur du bord instable de  $A_{n_1+m}$ . Mais ces bords ne se coupent ni ne se contournent, donc  $W_{\mathcal{Q}}^s(\sigma^{n_1} A)$  serait aussi raccourci, en contradiction avec la définition de  $n_1$ .

## 6. Conclusion

D'après ce qui précède, il suffit de prouver la multiplicité finie ou l'unicité des mesures maximales pour le décalage  $\Sigma_B$ . Soit  $\hat{\Sigma}$  le décalage  $\sigma$  sur l'ensemble des chemins bi-infinis sur le graphe  $\mathcal{D}$  dont les sommets sont  $(w, k)$  où  $w$  est un mot de premier retour et  $1 \leq k < |w|$ ,  $|w|$  désignant la longueur de  $w$  et les flèches sont  $(w, k) \rightarrow (w, k+1)$  et  $(w, |w|-1) \rightarrow (w', 1)$  si le dernier symbole de  $w$  est le premier symbole de  $w'$ . Un théorème de Gurevic dit qu'il suffit de prouver que  $\mathcal{G}$  a un nombre fini, resp. égal à 1, de composantes irréductibles.

Observons que, par construction, toute composante irréductible de  $\mathcal{D}$  contient un état étoilé et ceux-ci sont en nombre fini, prouvant l'assertion principale.

Il faut maintenant montrer l'unicité dans le cas où  $f$  est topologiquement transitive. Remarquons que la transitivité de  $f$  est équivalente au fait que l'orbite de tout ouvert non-vide de toute feuille instable (ou stable) est dense. En effet, un tel ouvert contient une courbe  $W_\epsilon^u(x)$  pour  $\epsilon > 0$  assez petit or il existe  $z \in B(x, \epsilon/2)$  dont l'orbite est dense. Comme  $W_\epsilon^s(z)$  rencontre  $W_\epsilon^u(x)$ , ceci prouve la remarque, comme le diamètre de  $W_\epsilon^s(x)$  tend vers zéro d'après (D, page 1).

Les préorbites des points périodiques forment un ensemble dénombrable:  $N_1 := \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\text{Per}(f))$ . On peut donc choisir la partition de sorte que (\*) ses bords stables ne rencontrent pas  $N_2 := \bigcup_{x \in N_1} W_\epsilon^s(x)$ .

Pour montrer l'irréductibilité de  $\mathcal{D}$ , il suffit de vérifier que pour deux carrés quelconques  $R$  et  $R'$  de la partition, tels qu'il existe une boucle  $\Gamma$  basée en  $R'$ , on peut trouver une concaténation admissible de mots de base, le premier commençant par  $R$  et le dernier finissant par  $R'$ .

$\Gamma$  fournit un point  $T$ -périodique  $p$  tel que, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $f^T(W_\epsilon^u(p) \cap \mathcal{Q}^n(p)) \supset W_\epsilon^u(p)$ . (\*) assure que  $p$  est à l'intérieur de  $R'$ . Soit  $W_r^u(x_0) \subset R$  dont les extrémités évitent  $N_2$  (\*\*). La transitivité donne  $n \geq 0$  tel que  $f^n W_r^u(x)$  contient  $W_\epsilon^u(y) \cap R'$  pour un  $y \in R'$ . On peut supposer  $y \in W_\epsilon^s(p)$ .  $f^n(W_r^u(x) \cap \mathcal{Q}^n(x)) = I$ , un intervalle de  $W^u(y)$  contenant  $y$  en son intérieur d'après (\*) et (\*\*). La dilatation le long de  $\mathcal{F}^u$  (voir D, page 1) garantit maintenant que  $f^{n+kT}(W_r^u(x) \cap \mathcal{Q}^n(x) \cap f^{-n}\mathcal{Q}^{kT})$  traverse  $R'$  pour  $k$  assez grand. Mais ceci dit exactement que le  $Q, n + kT$ -itinéraire de  $x$  est une concaténation de mots de premiers retour, comme souhaité.  $\mathcal{D}$  est bien irréductible et la preuve du théorème est achevée.

### Références

- [1] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 470. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
- [2] R. Bowen, Some systems with unique equilibrium states. *Math. Systems Theory* 8 (1974/75), no. 3, 193–202.
- [3] J. Buzzi, Hyperbolicity from entropies, Talk at *International Cong. Mathematical Physics*, Rio de Janeiro, 2006.
- [4] J. Buzzi, *Measures of Maximum Entropy of Piecewise Affine Surface Homeomorphisms*, submitted (2007), arXiv:0709.2010.
- [5] S. Gouezel, C. Liverani, *Compact locally maximal hyperbolic sets for smooth maps: fine statistical properties*, preprint (2006), arXiv:math/0606722.
- [6] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [7] K. Petersen, *Ergodic theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [8] Ya. G. Sinai, Gibbs measures in ergodic theory. (Russian) *Uspehi Mat. Nauk* 27 (1972), no. 4(166), 21–64. English translation: Russian Math. Surveys 27 (1972), no. 4, 21–69.